Zahlenfolgen

Große Einführung

Einführende Beispiele
Explizite und rekursive Berechnung

Schaubilder und Eigenschaften

Ergänzt durch viele Arten rekursiv definierter Folgen,
auch spezieller Wachstumsfolgen!

Ergänzender Einsatz von CAS-Rechnern mit Anleitung

Datei Nr. 40011

Friedrich Buckel

Stand: 19. Januar 2010

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Inhalt

1 Was hier so alles passiert – Vorschau 4

2 Berechnung von Folgen durch explizite Bildungsvorschriften 5

Trainingsaufgabe 1 10

3 Berechnung komplizierter Folgen mit CAS-Rechnern 11

3.1 Berechnung von $a_n = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + 1$ 11

1. Mit TI Nspire CAS 11
2. Mit CASIO ClassPad 12

3.2 Berechnung von Folgen mit Bruchtermen 13

4 Berechnung von Folgen durch rekursive Bildungsvorschriften 16

4.1 Erste Beispiele 16

4.2 Rekursiv definierte Folgen mit konstanter Summe $a_{n+1} + a_n = z$ 20

4.3 Rekursiv definierte Folgen mit konstantem Produkt $a_{n+1} \cdot a_n = z$ 22

Trainingsaufgabe 2 23

5 Grundlagen zu arithmetischen und geometrischen Folgen 24

5.1 Arithmetische Folgen – rekursiv berechnet 24
5.2 Arithmetische Folgen – explizit berechnet 26

5.3 Folgen vom Typ $\boxed{a_{n+1} = a_n + n \cdot d + c}$ 30
Arithmetische Folgen 2. Ordnung 30

5.4 Geometrische Folgen – rekursiv berechnet 35

Trainingsaufgabe 3 36

5.5 Geometrische Folgen – explizit berechnet 37

Trainingsaufgabe 4 41

6 Geometrische Folgen als Wachstumsfolgen 42

6.1 Kontostand mit Zinseszins 42

6.2 Wachstum von Bakterienstämmen 44

7 (Wachstums-)Folgen des Typs $\boxed{u_{n+1} = u_n \cdot q + r}$ 45

Lösungen der Trainingsaufgaben 46 - 59

Hinweise

Die Abschnitte 1 bis 6 sind für absolute Anfänger gedacht. Im Abschnitt 7 wird es anspruchsvoll.
Der in Abschnitt 7 genannte Folgentyp $u_{n+1} = u_n \cdot q + r$ führt zu verschiedenartigen Wachstumsfolgen. Weil dieser Abschnitt sehr speziell ist, wurde er in einen eigenen Text mit der Nummer 40020 ausgelagert.

Hier wurden schon ein wenig arithmetische und geometrische Folgen angesprochen. Diese haben aber ihre eigenen Texte, wo die zu ihnen gehörenden speziellen Fragstellungen trainiert werden.

Vorwort

Die Texte über Folgen wurden sehr erweitert und überarbeitet. Daher sollte man sich auch in folgenden Texten umsehen:

40011 **Einführung**

Rekursive und explizite Berechnungsformeln

Grundlagen zu arithmetischen und geometrischen Folgen
(Dies wird in vorliegendem Text wiederholt!

Geometrische Folgen als Wachstumsfolgen (kurze Einführung)

40013 **Arithmetische Folgen 2. Ordnung**
Dies wurde auch schon in 40011 angesprochen

40019 **Geometrische Folgen als Wachstumsfolgen**

Prozentuales (exponentielles) Wachstum und Abnahme (wie Zinseszinsrechnung, radioaktiver Zerfall).
Hier wird noch einmal besprochen, was kurz in 40011 gezeigt worden ist.
Wer es also ausführlicher braucht, lese hier nach!

40020 **Spezielle Wachstumsfolgen**

Hier geht es um die rekursive Formel $u_n = u_{n-1} \cdot q + r$.
und die explizite Berechnung der Formeln.

Zu den Anwendungen gehören auch schwierigere finanzmathematische Vorgänge wie Ratensparen, Rentenzahlung, Darlehensfinanzierung.

Allgemein beschreiben diese Folgen das beschränkte Wachstum.
Dazu gehört auch die beschränkte Abnahme (Abkühlungsvorgänge u.a.)

40050 **Arithmetische und geometrische Reihen**

40060 **Geometrische Figuren als geometrische Folgen**
Es kommen auch Teilaufgaben zu Reihen vor.

40200 **Aufgabensammlung zu ar./geom. Folgen und Reihen**

1 Was hier so alles passiert – Vorschau für dieses Heft

Eine Liste von Zahlen wie $8\,;14\,;\;\;20\,;\;\;26\,;\;\;...$

oder $1;\;\;-1;\;\;-3\,;\;\;-5\,;\;\;...$

heißt eine Zahlenfolge. Wichtig ist, dass man dabei die Reihenfolge nicht verändert. Im Gegensatz zu einer Menge von Zahlen, die man in geschweifte Klammern schreibt $\{1;\;\;-1;\;\;-3\,;\;\;-5\,;\;\;...\}$. In ihr ist die Reihenfolge beliebig, und man schreibt gleiche Zahlen nur einmal auf. Würde man diese Folge $3;\;\;1;\;\;0;\;\;1;\;\;3;\;\;5\;\;...$ in eine Menge umwandeln, würde sie so aussehen $\{0;1;3;5;...\}$ oder so $\{3;1;0\,;5;...\}$. Als Mengen sind sie gleich.

Man bezeichnet Folgen gerne mit Buchstaben und hängt die Nummer des Gliedes als Index an:

$$a_1 = 1,\quad a_2 = -1,\quad a_3 = -3\,,\quad a_4 = -5\,,\;...$$

Und bezeichnet dann das allgemeine Glied er Folge gerne mit a_n.

Man verwendet auch die Funktionsschreibweise $a(1),\;\;a(2),\;\;....,a(n)$

Wie wird eine Folge in einer Aufgabe gegeben?

Die erste Möglichkeit ist die **aufzählende Schreibweise**, die wir soeben kennen gelernt haben:
$1\,;\;\;-1\,;\;\;-3\,;\;\;-5\,;\;\;...$ Die drei Punkte am Ende besagen, dass es „irgendwie" weiter geht.
In der Regel meint man aber, dass ein erkennbares Bildungsgesetz weiter angewandt werden soll. Hier kann man erkennen, dass jede folgende Zahl um 2 kleiner ist als der Vorgänger. Das 5. Glied der Folge sollte also $a_5 = -7$ sein. Doch man wissen, dass es unendlich viele verschiedene Folgen gibt, die alle mit denselben Gliedern beginnen und dann später unterschiedlich sind!

Die zweite Möglichkeit ist eine **explizite Bildungsvorschrift (**Berechnungsformel). Die Vorschrift $\boxed{a_n = 3 - 2\cdot n}$ liefert für jedes $n \in \mathbf{N} = \{1,2,3,...\}$ einen Zahlenwert. Man kann leicht nachrechnen, dass man hiermit genau die Folge $a_1 = 1,\; a_2 = -1,\; a_3 = -3\,,\; a_4 = -5\,,\;\; a_5 = -7$ usw. erhält. In der Schreibweise $a(n) = 3 - 2n$ erkennt man eher, dass es sich bei einer Folge um eine Funktion handelt, deren Definitionsbereich hier die Menge der natürlichen Zahlen ist.

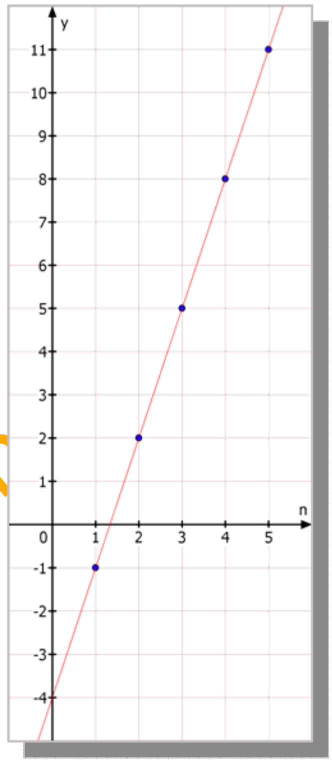
Die dritte Möglichkeit ist die **rekursive Bildungsvorschrift**. In unserem Beispiel ist der Nachfolger stets um 2 kleiner als der Vorgänger. Man kann den Vorgänger a_n und den Nachfolger a_{n+1} nennen, oder a_{n-1} als Vorgänger und a_n als Nachfolger verwenden. Dann lautet die Formel so: $\boxed{a_{n+1} = a_n - 2}$ oder $\boxed{a_n = a_{n-1} - 2}$. Dies allein reicht aber nicht. Man muss noch angeben, wie das erste Glied der Folge heißen soll, also hier $a_1 = 1$. Mit $a_1 = 13$ erzeugt diese Formel eine andere Folge!

In diesem Heft werden ganz viele Folgen rekursiv erzeugt. Darunter sind finanzmathematische Anwendungen und andere Wachstumsfolgen. Ratensparen, Darlehen usw. gehören auch zu rekursiven Folgen und werden im 2. Teil des Textes (40020) besprochen. Bei vielen Aufgaben stellen die CAS-Rechner eine große Hilfe dar. Daher wird sehr oft als Ergänzung eine Anleitung zum Einsatz dieser Rechner gegeben.

2 Berechnung von Folgen durch explizite Bildungsvorschriften

Beispiel 1

Die Funktion $f(x) = 3x - 4$ mit $x \in \mathbb{R}$ ist eine lineare Funktion. Ihr Schaubild ist eine Gerade.



Beschränkt man sich auf den Definitionsbereich $D = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, dann erhält man eben nur die dazu gehörenden Werte, die als Zahlenpaare dargestellt zu einzelnen Punkte dieser Geraden werden. Man nennt die Funktion dann eine Folge und schreibt deren Funktionsterm / Folgenterm z. B. so $\boxed{a_n = 3n - 4}$.

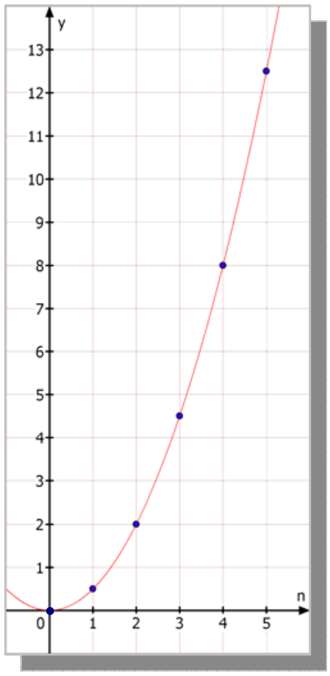
Die Verwendung von n statt x soll optisch sofort klar machen, dass man nur natürliche Zahlen einsetzt,

Die Folge sieht dann so aus:

$f(1)$ oder $a_1 = 3 \cdot 1 - 4 = -1$
$f(2)$ oder $a_2 = 3 \cdot 2 - 4 = 2$
$f(3)$ oder $a_3 = 3 \cdot 3 - 4 = 5$
$f(4)$ oder $a_4 = 3 \cdot 4 - 4 = 8$
$f(5)$ oder $a_5 = 3 \cdot 5 - 4 = 11$ usw.

Wir haben jetzt fünf Werte der Zahlenfolge -1; 2; 5; 8; 11; … berechnet. Das Schaubild dieser Folge besteht aus den (fünf) blauen Punkten. Mehr passen nicht in die Abbildung.

Beispiel 2



Die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ mit $x \in \mathbb{R}$ ist eine quadratische Funktion. Ihr Schaubild ist eine Parabel.

Wir beschränken uns auf den Definitionsbereich $D = \mathbb{N}_o = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, und schreiben dann etwa $\boxed{b_n = \frac{1}{2}n^2}$, dann entsteht eine Folge, die mit n = 0 beginnt, und deren Schaubild aus Punkten dieser Parabel besteht. Man erhält dann:

$b_O = \frac{1}{2} \cdot 0^2 = 0$, $\quad b_1 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$, $\quad b_2 = \frac{1}{2} \cdot 2^2 = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$,

$b_3 = \frac{1}{2} \cdot 3^2 = \frac{1}{2} \cdot 9 = \frac{9}{2}$, $\quad b_4 = \frac{1}{2} \cdot 4^2 = \frac{1}{2} \cdot 16 = 8$, usw.

Das Schaubild besteht also aus den Punkten mit diesen Koordinaten: $(0\,|\,0)$, $(1\,|\,\frac{1}{2})$, $(2\,|\,2)$, $(3\,|\,\frac{9}{2})$, $(4\,|\,8)$, ...

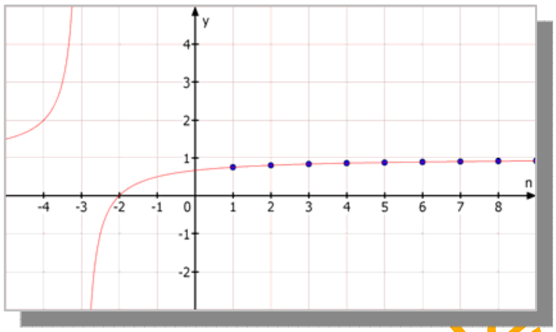
Beispiel 3

Berechne zur Bruchfolge $c_n = \dfrac{n+2}{n+3}$ die ersten vier Glieder für $n \in \mathbb{N}$.

Die Lösung steht auf der nächsten Seite.

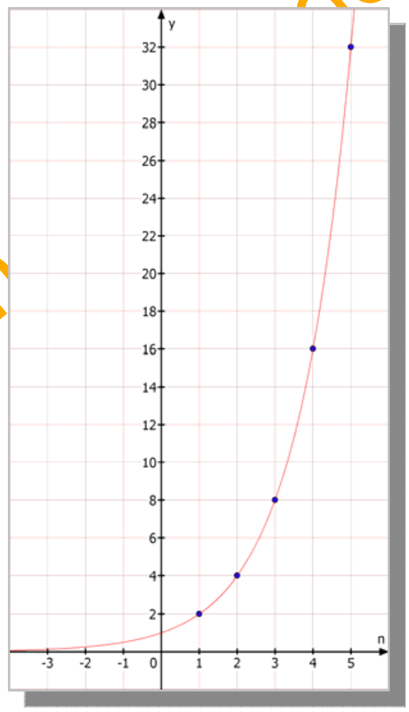
Lösung:

$$c_1 = \frac{1+2}{1+3} = \frac{3}{4}, \quad c_2 = \frac{2+2}{2+3} = \frac{4}{5}, \quad c_3 = \frac{3+2}{3+3} = \frac{5}{6}, \quad c_4 = \frac{4+2}{4+3} = \frac{6}{5}, \ldots$$



Das Schaubild der reellen Funktion $f(x) = \frac{x+2}{x+3}$ ist die rote Kurve. Die blauen Punkte gehören zu Schaubild der Folge $c_n = \frac{n+2}{n+3}$.

Beispiel 4



Man kann natürlich auch aus Exponentialfunktionen Zahlenfolgen machen, etwa aus $f(x) = 2^x$ die Folge

$$\boxed{d_n = 2^n}.$$

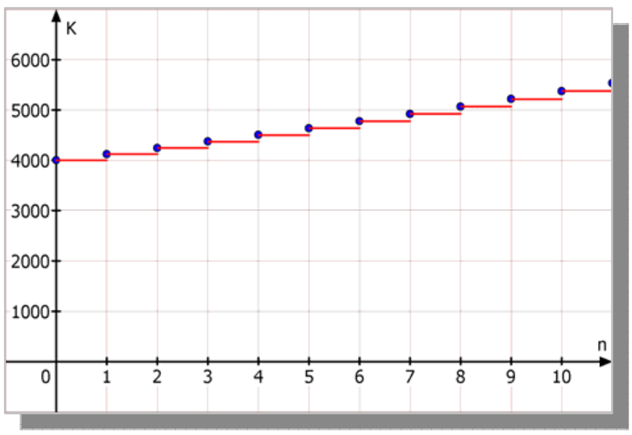
Die Werte der Folge sind dann Zweierpotenzen:

$d_1 = 2^1 = 2$, $d_2 = 2^2 = 2 \cdot 2 = 4$, $d_3 = 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$,
$d_4 = 2^4 = \ldots = 16$ und $d_5 = 2^5 = 32$, …

Solche Exponentialfunktionen treten als Wachstums-funktionen in Erscheinung.

Nehmen wir als **Beispiel 5**,
den Kontostand eines Guthabenkontos, bei dem immer am Jahresende der Jahreszins dazu kommt und sonst nichts passiert. Im Text 18250 wurde auf den Seiten 2/3 berechnet, wie sich 4000 € bei einem Zinssatz von 3 % vermehren:

Die Kontostandsfolge lautet $K_n = K_0 \cdot q^n = 4000 \cdot 1{,}03^n$. Hier beginnt man mit der Zählung der Folgenglieder schon bei n = 0, wählt also den Definitionsbereich $D = \mathbb{N}_0 = \{0; 1; 2; \ldots\}$.



Man erhält für die Jahre 1, 2, 3 und 4:

$K_1 = 4000 \cdot 1{,}03 = 4120$

$K_2 = 4000 \cdot 1{,}03^2 = 4243{,}60$

$K_3 = 4000 \cdot 1{,}03^3 = 4370{,}91$

$K_4 = 4000 \cdot 1{,}03^4 = 4502{,}04$, usw.

Das Schaubild wurde mit **Mathegrafix** erstellt. Die Treppenfunktion hat dort die Gleichung f(x) = 4000*1,03^Gauss(x).
Sie gibt den während eines Jahres konstant bleibenden Kontostand an.

Weitere Beispiele

(6) $\boxed{a_n = 4n - 1}$ ergibt: 3, 7, 11, 15, …

Behauptung: Hier nehmen die Glieder der Folge stets um 4 zu.

Dies wollen wir beweisen. Es genügt nicht, dies an Hand der 4 Zahlen zu überprüfen!

Dazu rechnen wie aus, wie groß ganz allgemein die Differenz zwischen einem Folgenglied und seinem Nachfolger a_{n+1} ist.

> <u>Für Anfänger</u> ist es oft schwierig, ein Glied a_{n+1} zu berechnen. Doch das ist ganz einfach:
> Soll man a_7 berechnen, ersetzt man n durch 7. Soll man a_{n+1} berechnen, ersetzt man n durch (n+1): $a_{n+1} = 4\cdot(n+1) - 1 = 4n + 4 - 1 = 4n + 3$

Wir subtrahieren den Nachfolger vom Vorgänger:

$$a_{n+1} - a_n = [4(n+1) - 1] - [4n - 1] = \cancel{4n} + 4 - \cancel{1} - \cancel{4n} \boxed{+} \cancel{1} = 4$$

Also wissen wir: $a_{n+1} - a_n = 4$, also $\boxed{a_{n+1} = a_n + 4}$

und das war ja die Behauptung!

Bei der Subtraktion von a_n muss man noch darauf achten, dass man <u>keine Vorzeichenfehler</u> macht, denn das Minuszeichen vor [4 n - 1] macht daraus $-4n \boxed{+} 1$!

Jetzt haben wir auch einen rekursiven Berechnungsmöglichkeit für diese Folge gefunden:

$$\boxed{a_{n+1} = a_n + 4} \text{ mit } a_1 = 3.$$

Zur Erinnerung:

Man muss das Anfangsglied zu einer rekursiven Bildungsvorschrift stets angeben!

Bei einem anderen Anfangsglied ergibt die gleiche Rekursionsformel eine andere Folge:

Etwa $\boxed{a_{n+1} = a_n + 4}$ mit $a_1 = 10$. Man erhält dann

$a_2 = a_1 + 4 = 10 + 4 = 14$

$a_3 = a_2 + 4 = 14 + 4 = 18$

$a_4 = a_3 + 4 = 18 + 4 = 22$ usw.

Diese neue Folge hat auch die Eigenschaft, dass das nachfolgende Glied immer um 4 größer ist als der Nachfolger. Ihre explizite Formel lautet übrigens: $\boxed{a_n = 4n + 6}$

(7) $\boxed{a_n = 50 - 5n}$ ergibt: 45, 40, 35, 30, …

Hier nehmen die Glieder der Folge immer um 5 ab.

Beweis: $a_{n+1} - a_n = [50 - 5(n+1)] - [50 - 5n] = \cancel{50} - \cancel{5n} - 5 - \cancel{50} + \cancel{5n} = -5$

Also wissen wir: $a_{n+1} = a_n - 5$ und das war ja die Behauptung!

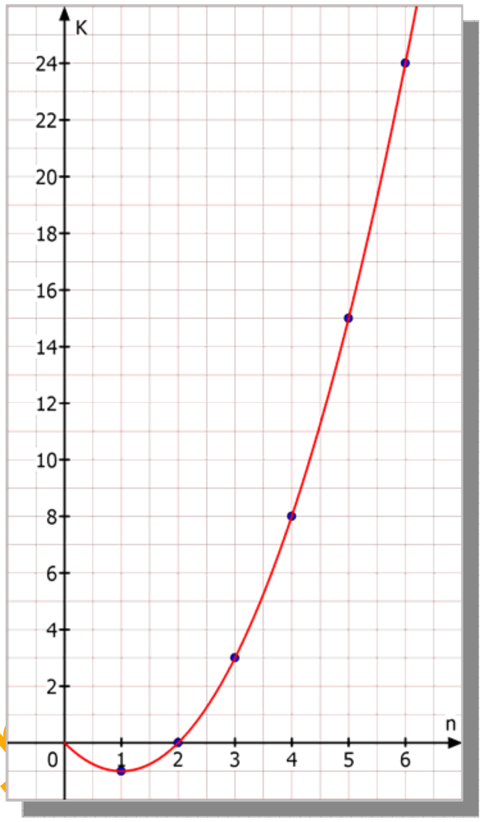
Jetzt haben wir auch schein einen <u>rekursiven Berechnungsterm</u>:

Es ist $\boxed{a_{n+1} = a_n - 5}$ mit $a_1 = 45$. Daraus kann man dann errechnen:

$a_2 = a_1 - 5 = 45 - 5 = 40$. Daraus dann $a_3 = a_2 - 5 = 40 - 5 = 35$ usw.

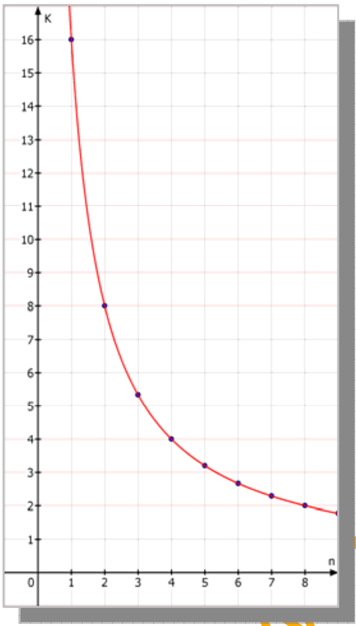
(8) $\boxed{a_n = n^2 - 2n}$ ergibt: -1, 0, 3, 8, …

Das Schaubild dieser Folge besteht aus Punkten einer Parabel.



(9) $\boxed{a_n = \frac{16}{n}}$ ergibt: 16, 8, $\frac{16}{3}$, 4, …

Die Punkte des Folgen-Schaubilds liegen auf der Hyperbel mit der Gleichung $y = \frac{16}{x}$



(10) Berechne nun bitte a_0 bis a_6 für die Folge: $\boxed{a_n = \frac{3n+1}{n-3}}$.

Lösung:

$a_0 = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$

$a_1 = \frac{4}{-2} = -2$,

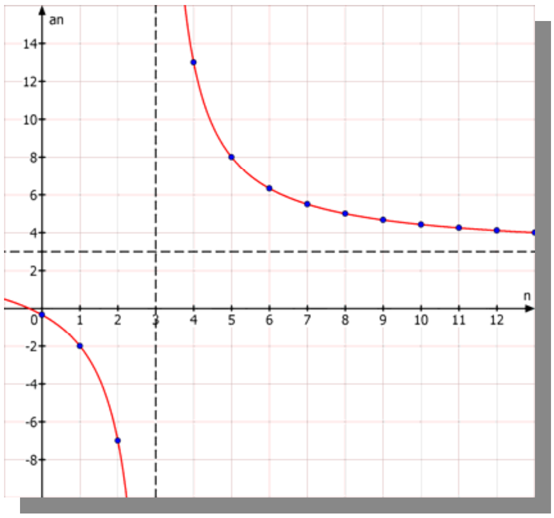
$a_2 = \frac{7}{-1} = -7$

$a_3 = \frac{10}{3-3} = \cancel{\frac{10}{0}}$ existiert nicht!

$a_4 = \frac{13}{1} = 13$

$a_5 = \frac{16}{2} = 8$

$a_6 = \frac{19}{3} = 6\frac{1}{3}$ usw.



Die Punkt-Folge liegt auf einer Hyperbel, die allerdings bei x = 3 keinen Punkt besitzt, weshalb auch a_3 nicht existiert (denn durch 0 kann man ja nicht teilen!).

(11) $\boxed{a_n = (-1)^n \cdot (n+2)}$ ergibt
$$a_1 = (-1)^1 \cdot (1+2) = -3$$
$$a_2 = (-1)^2 \cdot (2+2) = +4$$
$$a_3 = (-1)^3 (3+2) = -5$$
$$a_4 = (-1)^4 \cdot (4+2) = +6 \quad \text{usw.}$$

Eine Folge deren Glieder abwechselnd unterschiedliche Vorzeichen tragen, heißt eine **alternierende Folge**.

(12) $\boxed{a_n = (-1)^{n+1} \cdot (n+2)}$ ergibt
$$a_1 = (-1)^2 \cdot (1+2) = +3$$
$$a_2 = (-1)^3 \cdot (2+2) = -4$$
$$a_3 = (-1)^4 (3+2) = +5$$
$$a_4 = (-1)^5 \cdot (4+2) = -6 \quad \text{usw.}$$

Beobachtung: Die Folgen (11) und (12) unterscheiden sich nur in ihren Vorzeichen.
Der Grund dafür liegt in den Faktoren $(-1)^n$ und $(-1)^{n+1}$.
Und das ist die Wirkung dieser Faktoren:

$(-1)^n$	erzeugt für ungerades n ein Minuszeichen, für ein gerades ein Pluszeichen.
$(-1)^{n+1}$	erzeugt für ein ungerades n ein Pluszeichen, für ein ungerades ein Minus, denn der Exponent enthält +1, und daher wird bei ungeradem n der Exponent gerade. Dasselbe passiert bei $(-1)^{n-1}$.

(13) Diese sogenannten „Vorzeichenfolgen" sollte man sich gut merken:

$a_n = (-1)^n$:	1, -1, 1, -1, usw.	
$a_n = (-1)^{n+1}$:	-1, 1, -1, 1, usw.	
$a_n = (-1)^{n-1}$:	-1, 1, -1, 1, usw.	
$a_n = (-1)^{2n}$:	1, 1, 1, 1, usw.	(denn 2n ist immer gerade!)
$a_n = (-1)^{2n+1}$	-1, -1, -1, -1, usw.	(denn 2n+1 ist immer ungerade!)

(14) Auch diese Folgen sollte man sich gut merken:

$a_n = 2n$:	2, 4, 6, 8, usw.	ist die Folge der geraden Zahlen.
$a_n = 2n-1$:	1, 3, 5, 7, usw.	ist die Folge der ungeraden Zahlen.
$a_n = 2n+1$:	3, 5, 7, 9, usw.	ist die Folge der ungeraden Zahlen ab 3.
$a_n = 3n$:	3, 6, 9, 12, usw.	ist die Folge der Vielfachen von 3.
$a_n = 4n+1$:	5, 9, 13, 17, usw.	ist die Folge der um 1 vergrößerten Viererzahlen.
$a_n = 5n-3$:	2, 7, 12, 17, usw.	ist die Folge der um 3 verkleinerten Fünferzahlen.
usw.		

Trainingsaufgabe 1

Berechne jeweils a_1 bis a_5.

(a) $a_n = 3n - 11$

(b) $a_n = 24 - 10n$

(c) $a_n = n^2 - 16$

(d) $a_n = n^2 - 2n + 3$

(e) $a_n = n^3 - n^2 - 18$

(f) $a_n = \frac{n-4}{n}$

(g) $a_n = \frac{(n-2)^2}{n^2+4}$

(h) $a_n = \frac{4n + (-1)^n}{2n}$ (Skizze!)

(i) $a_n = 2^{2n-1}$

Vereinfache den Term!

(j) $a_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{n^2+4}{n-4}$

Auf welchen 2 Kurven „liegt" diese Folge? Skizze!

(k) $a_n = \frac{2^n}{n}$

(l) $a_n = \frac{8}{2^{n-1}}$ Term vereinfachen! Skizze!

(m) $a_n = \sqrt{n+4}$ (Skizze)

(n) $a_n = \sin(n \cdot \frac{\pi}{4})$ Skizze!

(o) $a_n = \frac{(-1)^n + 1}{n}$!!

(p) $a_n = n^{(-1)^n}$!!

(q) $a_n = (2n-1)^{n-1}$

(r) $a_n = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n$ (Wichtige Lösung!)

(t) $a_n = 1 + (-1)^{n-1}$

Was kann man über die Werte aussagen?

(u) $a_n = \sqrt[n]{2}$

(v) $a_n = \operatorname{sgn}(4-n)$

Was kann man über die Werte aussagen?

(w) $a_n = \left(1+(-1)^n\right) \cdot \left(1-(-1)^n\right)$

Kannst du das Ergebnis erklären?

(x) $a_n = \sqrt{\frac{(-2)^n - 2}{(-2)^n + 2}}$

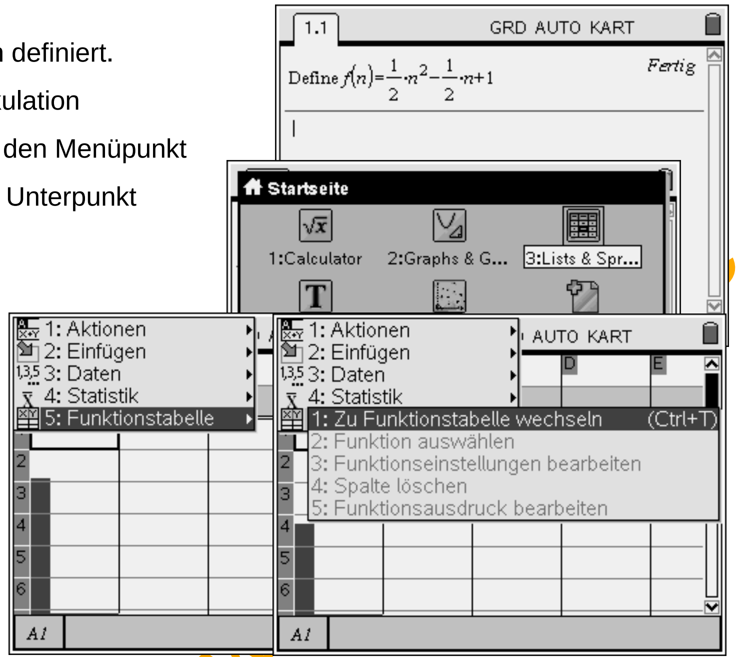
(y) $a_n = \frac{1}{1-\frac{1}{n}}$

3 Berechnung komplizierterer Folgen mit CAS-Rechnern

3.1 Berechnung von Folgengliedern zu $a_n = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + 1$.

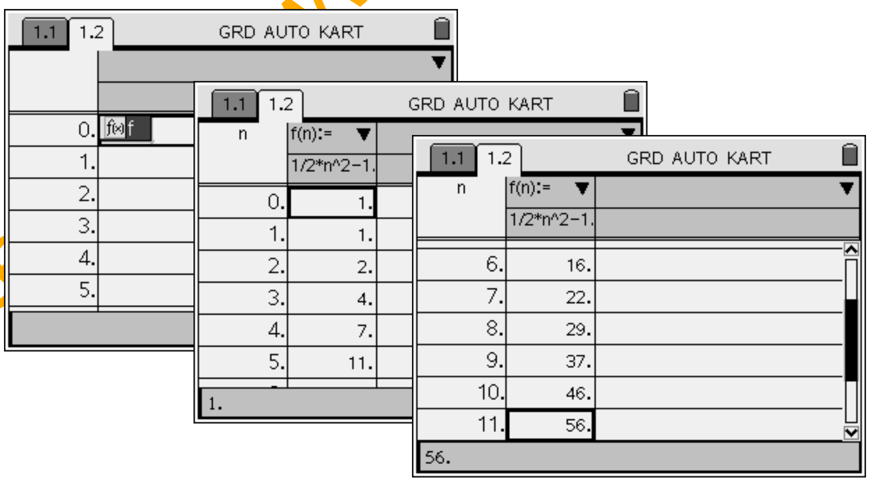
1. Mit TI Nspire CAS.

Zuerst wird die Folge als Funktion definiert.
Dann öffnet man die Tabellenkalkulation (Lists & Spreadsheets) und wählt den Menüpunkt 5: Funktionstabelle und dann den Unterpunkt 1: Zu Funktionstabelle wechseln.

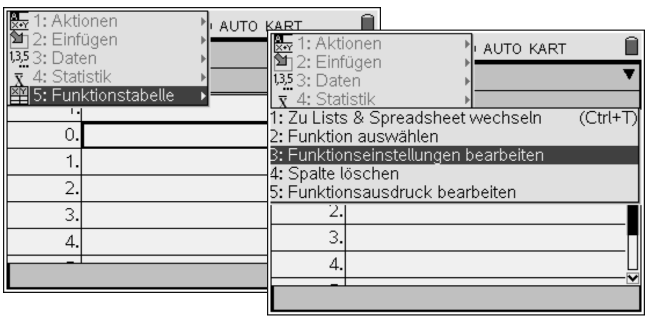


Dann erscheint eine noch leere Wertetabelle, bei der in der 2. Spalte angezeigt ist, welche Funktionen definiert sind. Wir benötigen f(x) und drücken enter.

Daraufhin wird die Tabelle mit Werten gefüllt, hier ab n = 0. Unsere Folge beginnt allerdings ab n=1. Man kann beliebig weit nach unten blättern und so weitere Werte anzeigen lassen.

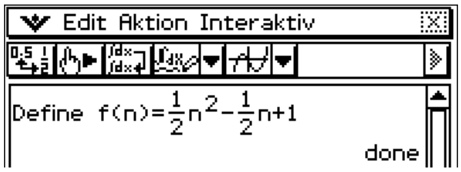


Übrigens lassen sich die Voreinstellungen für die Berechnung der Wertetafel ansehen und ändern:
Bevor man die Tabelleausfüllen lässt, kann man das über das Menü 5 / 3 erledigen:

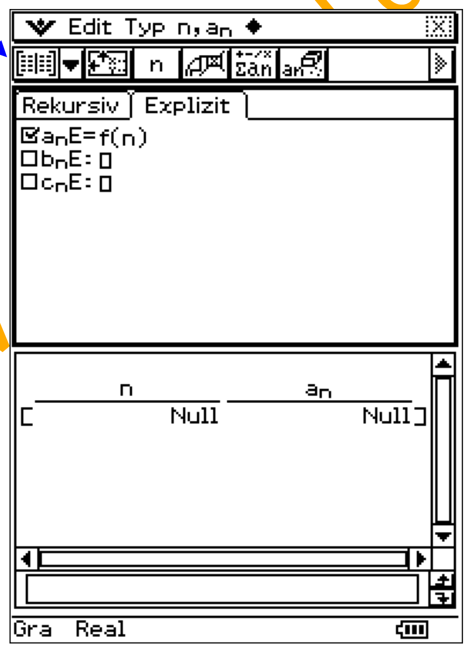


2. Mit CASIO ClassPad

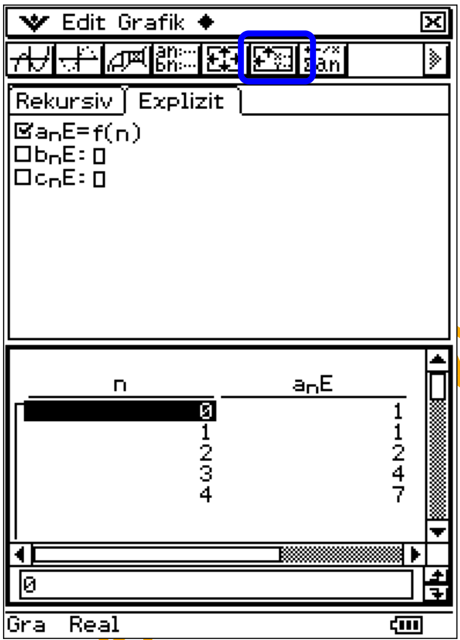
Zuerst öffnet man das Hauptmenü und definiert die Folge als Funktion.



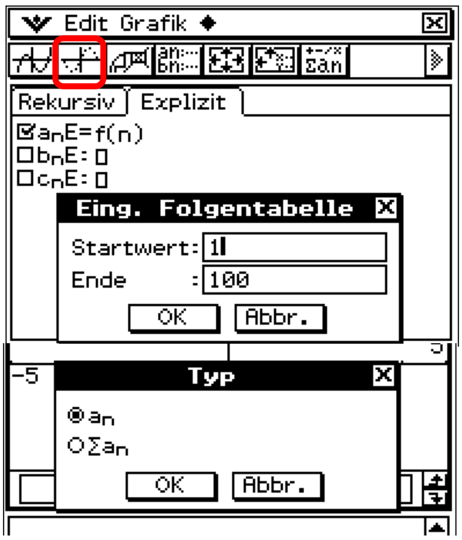
Dann öffnet man das Menü Zahlenfolgen und gibt dort unter dem Kartereiter „Explizit“ den soeben definierten Funktionsterm f(n) ein. Damit dies auch wirksam wird, muss man das Kästchen ankliocken und so den Haken setzen.



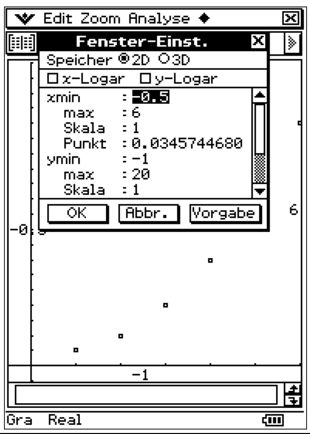
Nun klickt man das Icon für die Wertetafel an:
Und erhält einige Werte.



Dasa blau umrandete Icon öffnet das Fenster zur Änderung der Tabellenparameter:
Ich habe nun den Startwert 1 gesetzt
Dann lasse ich das Folgenschaubild durch Klick auf das rot umrandete Icon anzeigen.



Mit dem Icon mit den 4 Pfeilen kann man die Fenstereinstellungen verändern, so lange bis man mit der Darstellung zufrieden ist.



3.2 Berechnung von Folgen mit Bruchtermen.

Beispiel 1 $\boxed{a_n = \frac{4n+1}{n}}$

Die Berechnung der Folgenglieder wird manuell einfacher, wenn man folgenden Tipp beherzigt:

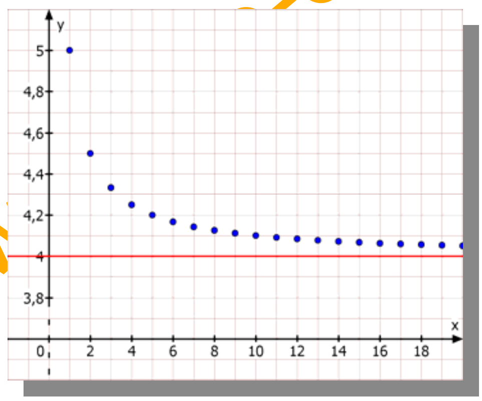
> Steht im Nenner keine Summe, zerlege den Bruch in Einzelbrüche.

Da geht so: $a_n = \frac{4n+1}{n} = \frac{4n}{n} + \frac{1}{n} = 4 + \frac{1}{n}$. Also nehmen wir $\boxed{a_n = 4 + \frac{1}{n}}$

Mit der gegebenen Form erhält man: $a_1 = \frac{5}{1} = 5$; $a_2 = \frac{9}{2}$;...$a_3 = \frac{13}{3}$; $a_4 = \frac{17}{4}$; $a_5 = \frac{21}{5}$; ...

Die zerlegte Form bringt: $a_1 = 4 + 1 = 5$; $a_2 = 4 + \frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$; $a_3 = 4 + \frac{1}{3} = 4\frac{1}{3}$; $a_4 = 4\frac{1}{4}$; ...

Welchen Vorteil hat die zweite Form? Man erkennt, dass zu 4 stets ein Bruch dazu addiert wird, dessen Wert immer kleiner wird und gegen 0 geht.



Damit kann man Herausarbeiten, dass sich diese Folge immer mehr dem Wert 4 annähert, den man den Grenzwert der Folge nennt.

Man schreibt das so auf: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(4 + \frac{1}{n}\right) = 4$ und man erkennt auch schon den Grund: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$.

Das Thema Grenzwert kommt erst in 40331 und 40341 an die Reihe.

Beispiel 2 $\boxed{a_n = \frac{4n-3}{2n+1}}$

Zuerst müssen wir über die Zerlegung dieses Bruchterms reden.

Schüler verlernen sehr schnell die Regeln des Bruchrechnens und kommen hier dann auf die verwegensten Ideen. Beispielsweise ist folgender Versuch der blanke Wahnsinn:

$a_n = \frac{4n-3}{2n+1} = \frac{4n}{2n} - \frac{3}{1} = 2 - 3 = -1$

Diese unerlaubte Zerlegung führt zu einem unsinnigen Ergebnis. Hiernach wären alle Glieder identisch.

Wenn man zerlegen will, kann man eine der folgenden Methoden anwenden:

(1) Der Nenner heißt 2n+1 Man ändert den Zähler so, dass oben das Doppelte steht, also $2\cdot(2n+1) = 4n+2$. Damit der alte Zählerwert erhalten bleibt, muss man -5 anfügen:

$$a_n = \frac{4n-3}{2n+1} = \frac{(4n+2)-5}{(2n+1)} = \frac{{}^{2}\cancel{(4n+2)}}{\cancel{(2n+1)}} - \frac{5}{(2n+1)} = 2 - \frac{5}{2n+1}$$

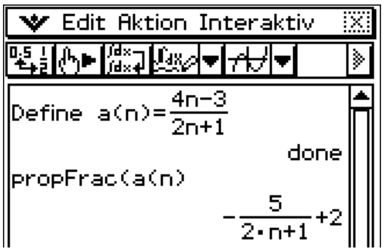
(2) Mit Polynomdivision erreicht man dasselbe:

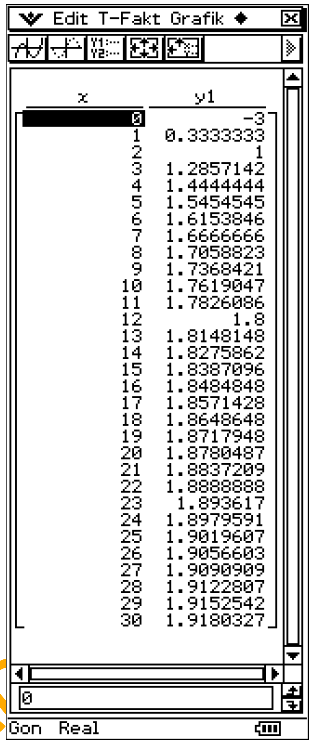
$$\boxed{\begin{array}{l} (4n-3):(2n+1) = 2 \\ \underline{-(4n+2)} \\ \quad -5 \ \leftarrow \text{Rest} \end{array}}$$

Also ist: $a_n = \frac{4n-3}{2n+1} = 2 - \frac{5}{2n+1}$

(3) Wer mit CAS-Rechnern arbeitet, hat es viel einfacher:

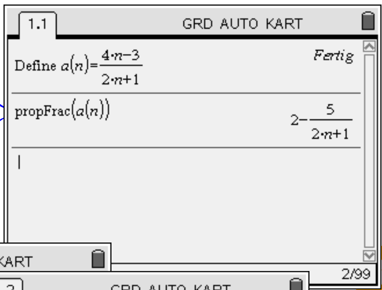
Hier wird mit **CASIO ClassPad** der Term zerlegt und gleich anschließend eine Wertetafel der Folge ausgegeben.



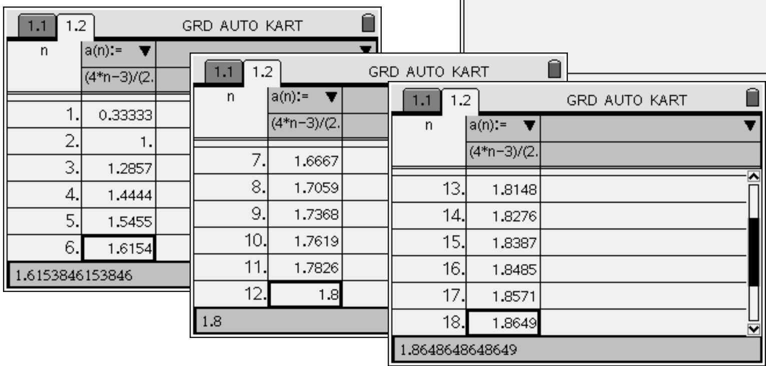


(4) Mit **TI Nspire** läuft das genauso.

Über das Menü menu 3 7 1 (Echter Bruch) beschafft man sich den Befehl propFrac und erhält dieselbe Zerlegung.

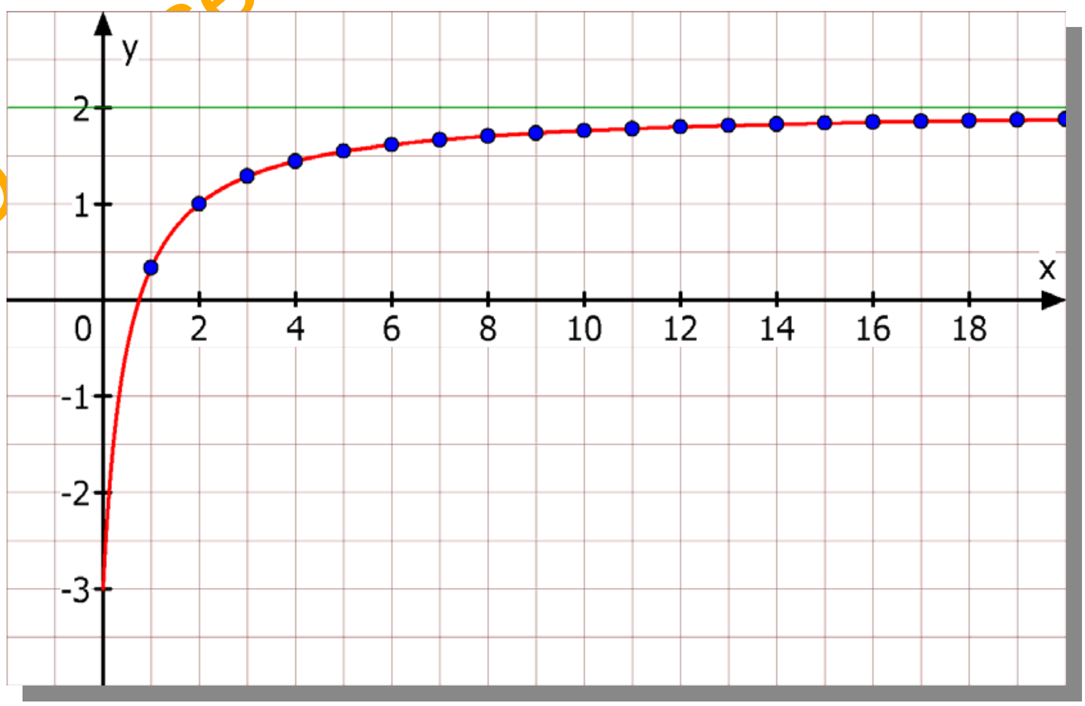


Zur Berechnung der Wertetafel rufe man Lists & Spreadsheets auf und erzeugt über menu 5 1 die Wertetabelle:



Mit MatheGrafix lasse ich das Schaubild erstellen. Es lässt erahnen, dass es auch hier einen Granzwert gib. Man vermutet $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n-3}{2n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[2+\frac{5}{2n+1}\right]=2$

Mit rot ist die Kurve $y=\frac{4x-3}{2x+1}$ unterlegt. Die blauen Punkte gehören zum Schaubild der Folge.



Beispiel 3

$$\boxed{a_n = \frac{n}{n^2+4}}$$

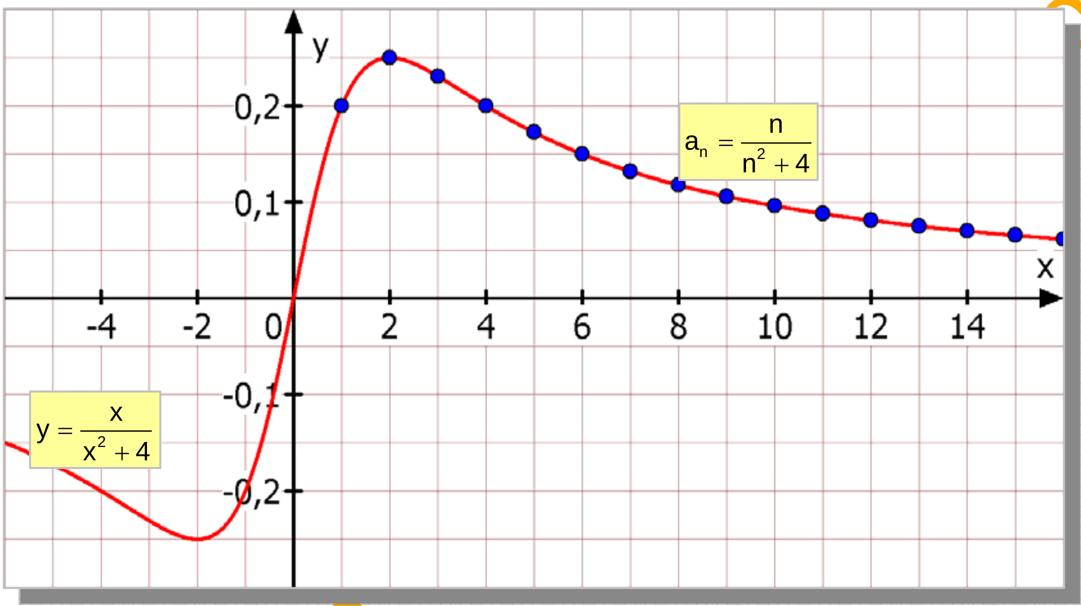
Auch hier zuvor eine <u>Warnung</u>: Diese Umformung $a_n = \frac{n}{n^2} + \frac{n}{4}$ ist falsch!

Man kann hier nicht weiter zerlegen. Auch nicht mit Polynomdivision! Wenn der Grad des Zählers kleiner als der des Nenners ist, liegt ein echter Bruch vor, den man nicht weiter zerlegen kann.

Hier einige Glieder der Folge:

$$a_1 = \frac{1}{5},\quad a_2 = \frac{2}{8} = \frac{1}{4},\quad a_3 = \frac{3}{13};\quad a_4 = \frac{4}{20} = \frac{1}{5},\quad a_5 = \frac{5}{29},\quad a_6 = \frac{6}{40} = \frac{3}{20}$$

Diese Werte werden immer kleiner. Die Folge fällt offenbar ab a_2:



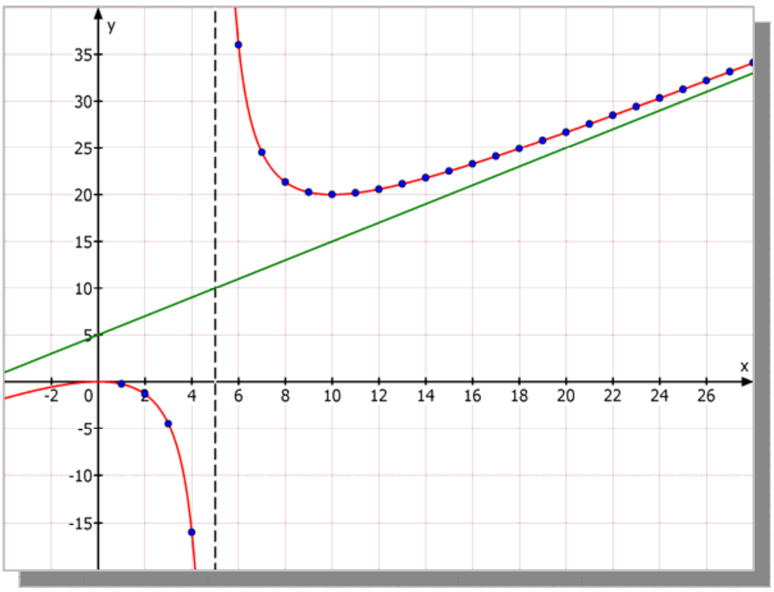
Beispiel 4

$$\boxed{a_n = \frac{n^2}{n-5}}$$

Diese Folge zeigt ein seltsames Verhalten, denn zuerst hat sie negative Werte, dann fällt ein Wert völlig aus:

$$a_5 = \frac{25}{5-5} = \cancel{\frac{25}{0}}$$ existiert nicht.

Schließlich scheint sie „entlang einer Geraden“ unendlich groß zu werden. Dieses Verhalten wird in 40341 genauer untersucht.



4 Berechnung von Folgen durch rekursive Bildungsvorschriften

Eine Folgendefinition heißt **rekursiv**, wenn man jedes Glied aus seinem Vorgänger berechnen muss. Natürlich muss ein „Anfangsglied“ gegeben sein, damit man weiß, wo man mit der Berechnung beginnen kann. Dies muss aber nicht unbedingt a_1 sein. Man kann beispielsweise auch a_5 vorgeben und von dort aus nicht nur die nachfolgenden Glieder, sondern auch die Vorgänger berechnen.

4.1 Erste Beispiele

(1) Gegeben ist die Vorschrift: $\boxed{a_n = a_{n-1} + 3}$ mit $a_1 = 5$.

Hier wird aus a_{n-1} der Nachfolger a_n berechnet. Und zwar so:

$$a_2 = a_1 + 3 = 5 + 3 = 8.$$
$$a_3 = a_2 + 3 = 8 + 3 = 11$$
$$a_4 = a_3 + 3 = 11 + 3 = 14 \quad \text{usw.}$$

Aber das geht nicht: $a_{37} = a_{36} + 3 = ?$

Wenn man a_{36} noch nicht kennt, lässt sich a_{37} nicht berechnen.

<u>Noch ein Hinweis:</u>

Wenn statt $a_1 = 5$ ein anderer Wert gegeben ist, etwa $a_1 = -4$, dann wird trotz gleicher Berechnungsvorschrift die Folge anders:

$$a_2 = a_1 + 3 = -4 + 3 = -1$$
$$a_3 = a_2 + 3 = -1 + 3 = 2$$
$$a_4 = a_3 + 3 = 2 + 3 = 5$$
$$a_5 = a_4 + 3 = 5 + 3 = 8 \quad \text{usw.}$$

Hinweis:
Die explizite Formel für diese Folge lautet:
$\boxed{a_n = 3n + 2}$

Man erhält hier zufällig ab a_4 dieselben Zahlen wie bei der oberen Folge, aber diese beiden Folgen sind dennoch verschieden, weil die Nummern unterschiedlich sind!

(2) Gegeben ist die Vorschrift: $\boxed{a_{n+1} = a_n - 6}$ mit $a_1 = 50$.

Hier geht die Formel im Gegensatz zu (1) von a_n aus und berechnet den Nachfolger, der dann natürlich a_{n+1} heißt. Ob man in deiner solchen Vorschrift mit a_n und a_{n+1} arbeitet, oder wie in (1) mit a_{n-1} und a_n, das ist völlig unerheblich. Man könnte hier die Vorschrift auch so schreiben: $a_n = a_{n-1} - 6$. Oder man könnte in (1) $a_{n+1} = a_n + 3$ verwenden.
Das Ergebnis ist dasselbe!

Hier berechnet man nun

$$a_2 = a_1 - 6 = 50 - 6 = 44.$$
$$a_3 = a_2 - 6 = 44 - 6 = 38$$
$$a_4 = a_3 - 6 = 38 - 6 = 32 \quad \text{usw.}$$

Hinweis:
Die explizite Formel für diese Folge lautet:
$\boxed{a_n = 50 - 6n}$

Hinweis: (1) und (2) nennt man „**arithmetische Folgen**“, weil die Differenzen aufeinander folgender Glieder gleich groß sind. Siehe dazu Abschnitt 5 und Text 40012.

(3) Gegeben: $\boxed{a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n}$ mit $a_1 = 54$.

Man erkennt, dass die Folgenglieder fortgesetzt durch 3 geteilt werden.

Man erhält so:

$$a_2 = \tfrac{1}{3} \cdot 54 = 18$$
$$a_3 = \tfrac{1}{3} \cdot 18 = 6$$
$$a_4 = \tfrac{1}{3} \cdot 6 = 2$$
$$a_5 = \tfrac{1}{3} \cdot 2 = \tfrac{2}{3}$$
$$a_6 = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{2}{3} = \tfrac{2}{9}$$

Hinweis:

Die explizite Formel für diese Folge lautet:

$$\boxed{a_n = 162 \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right)^n = \frac{162}{3^n}}$$

Hier liegt eine **geometrische Folge** vor, nämlich immer dann, wenn der Nachfolger aus dem Vorgänger durch Multiplikation oder Division mit einer konstanten Zahl entsteht,

also wenn gilt: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \text{konstant}$.

Das wird in Abschnitt 5.4 ausführlich besprochen.

(4) Gegeben sei $\boxed{a_{n+1} = 2a_n}$ mit $a_5 = 4$.

Die einzig bekannte Zahl der Folge ist jetzt a_5 und nicht a_1. Rechnen wir also zuerst einige **Nachfolger** von a_5 aus:

$$a_6 = 2 \cdot a_5 = 2 \cdot 4 = 8$$
$$a_7 = 2 \cdot a_6 = 2 \cdot 8 = 16$$
$$a_8 = 2 \cdot a_7 = 2 \cdot 16 = 32 \quad \text{usw.}$$

Nun aber rechnen wir zurück, denn die **Vorgänger** sind auch gesucht.
Dazu stellt man die Berechnungsformel nach dem Vorgänger a_N um:

$\boxed{a_n = \frac{a_{n+1}}{2}}$ ergibt dann:

$$a_4 = \frac{a_5}{2} = \frac{4}{2} = 2$$
$$a_3 = \frac{a_4}{2} = \frac{2}{2} = 1$$
$$a_2 = \frac{a_3}{2} = \frac{1}{2}$$
$$a_1 = \frac{a_2}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}.$$

Hinweis:

Die explizite Formel für diese Folge lautet:

$$\boxed{a_n = 2^{n+1}}$$

Hinweis: Es handelt sich auch hier um eine **geometrische Folge**, denn der Quotient aufeinander folgender Zahlen ist konstant: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$.

Geometrische Folgen werden in Abschnitt 5 und vor allem im Text 40010 ausführlich besprochen

(5) Gegeben: $\boxed{a_n = 3 \cdot a_{n-1} - 2}$ mit $a_3 = 7$

Berechnung von **Nachfolgern**:

$$a_4 = 3 \cdot a_3 - 2 = 21 - 2 = 19$$
$$a_5 = 3 \cdot a_4 - 2 = 57 - 2 = 55$$
$$a_6 = 3 \cdot a_5 - 2 = 165 - 2 = 163$$

Berechnung von **Vorgängern**: Umstellung der Formel.

$$a_n = 3 \cdot a_{n-1} - 2 \quad | +2$$
$$a_n + 2 = 3 \cdot a_{n-1} \quad | :3$$
$$\boxed{a_{n-1} = \frac{a_n + 2}{3}}$$

$$a_2 = \frac{a_3 + 2}{3} = \frac{7+2}{3} = \frac{9}{3} = 3$$
$$a_1 = \frac{a_2 + 2}{3} = \frac{3+2}{3} = \frac{5}{3}$$

Hinweis:

Die explizite Formel für diese Folge lautet:

$$\boxed{a_n = 2 \cdot 2^{n-2} + 1}$$

Hinweis: Die Folge (5) gehört zu einem ganz speziellen Typ von Wachstumsfolgen. Siehe dazu den Abschnitt 7.

(6) Gegeben: $\boxed{a_n = 3 \cdot a_{n-1} - n}$ mit $a_1 = 1$.

Also folgt

$$a_2 = 3 \cdot 1 - 2 = 1$$
$$a_3 = 3 \cdot 1 - 3 = 0$$
$$a_4 = 3 \cdot 0 - 4 = -4$$
$$a_5 = 3 \cdot (-4) - 5 = -17 \quad \text{usw.}$$

Wer kennt hier eine explizite Berechnungsformel? Bitte um Zuschrift!

(7) Die folgende Rekursionsformel greift auf **zwei Vorgänger** zurück, also muss man auch zwei Zahlen vorgeben: $\boxed{a_n = a_{n-1} + a_{n-2}}$ mit $a_1 = 1;\ a_2 = 1$.

Also folgt

$$a_3 = a_1 + a_2 = 1 + 1 = 2$$
$$a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3$$
$$a_5 = a_4 + a_3 = 3 + 2 = 5 \quad \text{usw.}$$

(8) Gegeben: $\boxed{a_{n+2} = a_{n+1} - 2 \cdot a_n}$ mit $a_1 = 1$ und $a_2 = 1$

Hier wird ein Folgeglied aus jeweils 2 Vorgängern berechnet:

$$a_3 = a_2 - 2 \cdot a_1 = 1 - 2 \cdot 1 = 1 - 2 = -1$$
$$a_4 = a_3 - 2 \cdot a_2 = -1 - 2 \cdot 1 = -1 - 2 = -3$$
$$a_5 = a_4 - 2 \cdot a_3 = -3 - 2 \cdot (-1) = -3 + 2 = -1$$
$$a_6 = a_5 - 2 \cdot a_4 = -1 - 2 \cdot (-3) = -1 + 6 = 5$$
$$a_7 = a_6 - 2 \cdot a_5 = 5 - 2 \cdot (-1) = 5 + 2 = 7 \quad \text{usw.}$$

(9) Gegeben ist $\boxed{a_n = \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}}$ mit $a_1 = 12$ und $a_2 = 2$.

Es folgt

$$a_3 = \frac{a_1}{a_2} = \frac{12}{2} = 6$$

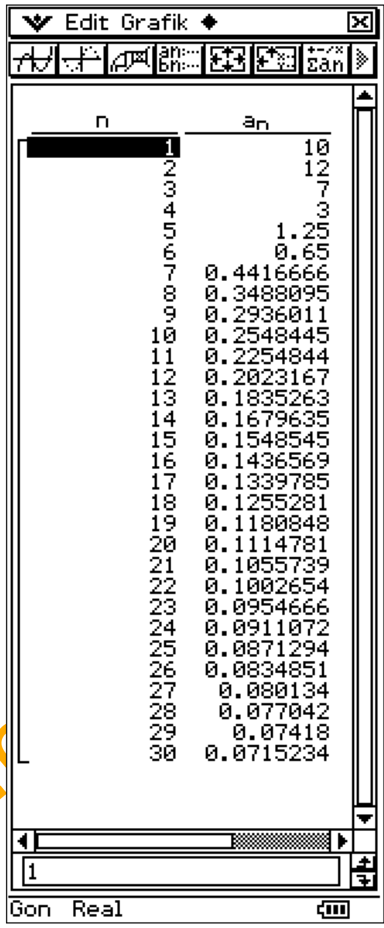
$$a_4 = \frac{a_2}{a_3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \qquad a_5 = \frac{a_3}{a_4} = \frac{6}{\frac{1}{3}} = 18 \quad \text{usw.}$$

(10) $a_{n+1} = \dfrac{a_n + 2}{n}$ mit $a_1 = 10$

$a_2 = \dfrac{10+2}{1} = 12 \qquad a_3 = \dfrac{12+2}{2} = 7\,, \qquad a_4 = \dfrac{7+2}{3} = 3$

Weitere Werte sehen wir in der Tabelle.

Offenbar geht die Folge gegen den Wert 0.



n	a_n
1	10
2	12
3	7
4	3
5	1.25
6	0.65
7	0.4416666
8	0.3488095
9	0.2936011
10	0.2548445
11	0.2254844
12	0.2023167
13	0.1835263
14	0.1679635
15	0.1548545
16	0.1436569
17	0.1339785
18	0.1255281
19	0.1180848
20	0.1114781
21	0.1055739
22	0.1002654
23	0.0954666
24	0.0911072
25	0.0871294
26	0.0834851
27	0.080134
28	0.077042
29	0.07418
30	0.0715234

(Eine explizite Formel kenne ich nicht.)

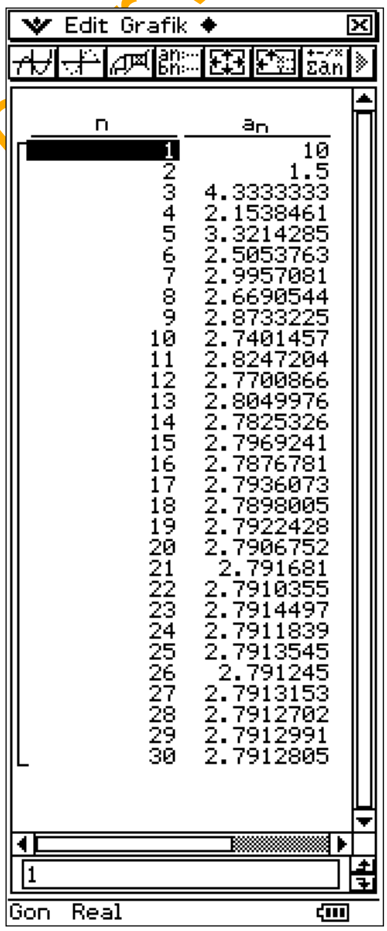
(11) $a_{n+1} = \dfrac{a_n + 5}{a_n}$ mit $a_1 = 10$

Diese Folge läuft gegen den Wert g = 2,79128…

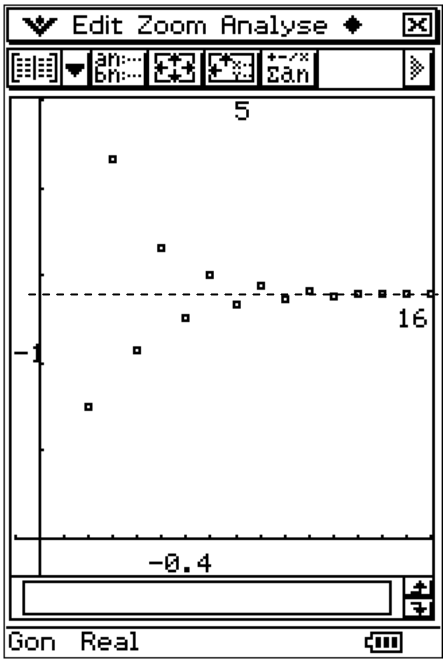
Und das ist genau $g = \dfrac{1+\sqrt{21}}{2}$.

Wie man darauf kommt, wird viel später verraten.

Besonders interessant ist die Tatsache, dass die Werte abwechselnd hin und her springen, und zwar liegen sie abwechselnd über diesem Grenzwert und wieder darunter.



n	a_n
1	10
2	1.5
3	4.3333333
4	2.1538461
5	3.3214285
6	2.5053763
7	2.9957081
8	2.6690544
9	2.8733225
10	2.7401457
11	2.8247204
12	2.7700866
13	2.8049976
14	2.7825326
15	2.7969241
16	2.7876781
17	2.7936073
18	2.7898005
19	2.7922428
20	2.7906752
21	2.791681
22	2.7910355
23	2.7914497
24	2.7911839
25	2.7913545
26	2.791245
27	2.7913153
28	2.7912702
29	2.7912991
30	2.7912805



4.2 Rekursiv definierte Folgen mit konstanter Summe $\boxed{a_{n+1} + a_n = z}$

(12) Gegeben: $\boxed{a_{n+1} = -a_n}$ mit $a_1 = 2$, also $\boxed{a_{n+1} + a_n = 0}$

Es folgt:

$$a_2 = -a_1 = -2$$
$$a_3 = -a_2 = 2$$
$$a_4 = -a_2 = -2 \quad \text{usw.}$$

Wir erhalten die Folge 2, -2, 2, -2, …

Es fällt auf, dass hier ständig zwei Zahlen abwechselnd erscheinen, und die Summe der beiden Zahlen ist stets 0, was ja schon die Formel zeigt.

(13) Gegeben: $\boxed{a_{n+1} + a_n = 20}$ mit $a_1 = 6$, was man auch so schreiben kann: $\boxed{a_{n+1} = 20 - a_n}$

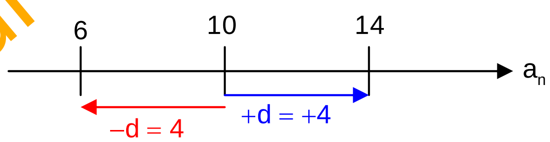
Diese Gleichung besagt, dass die Summe aufeinander folgender Glieder immer 20 ist.
Da $a_1 = 6$ ist, muss folglich der Nachfolger die Zahl 14 sein. Und deren Nachfolger (damit die Summe 20 wird) wieder 6, dann wieder 14 usw.

Man erkennt also, dass eine Folge, die eine aus einer rekursiven Formel der Art $\boxed{a_{n+1} = z - a_n}$ gebildet wird, immer so aussieht, dass die Summe aufeinander folgender Glieder gleich z ist.
Beginnt man mit a_1, dann ist $a_2 = z - a_1$, und dann $a_3 = z - (z - a_1) = a_1$.
Also wechseln sich a_1 und $z - a_1$ ständig ab.

Interessant ist noch ein Trick, mit dem man eine explizite Formel erstellen kann.

<u>Allditive Methode:</u>

Zu Beispiel (13):



Die beiden vorkommenden Werte sind 6 und 14. Der Mittelwert von beiden ist

$$m = \tfrac{1}{2} \cdot (6 + 14) = \tfrac{1}{2} \cdot 20 = 10\,.$$

Die beiden Zahlen haben von m den Abstand $d = 16 - 10 = 4$ bzw. $d = 10 - 6 = 4$
Subtrahiert man von 10 dieses d = 4, kommt man zu 6, addiert man aber 4, erhält man die andere Zahl 14. Also heißt die Formel doch etwa so: $a_n = 10 \pm 4$.

Doch wann nimmt man + und wann -? Das regelt der Faktor $(-1)^n$ oder $(-1)^{n+1}$.

1. Möglichkeit:

$a_n = 10 + (-1)^n \cdot 4$, dann erhält man für ungerades n: $a_n = 10 - 4 = 6$
und für gerades n: $a_n = 10 + 4 = 14$. (richtig!)

2. Möglichkeit:

$a_n = 10 + (-1)^{n+1} \cdot 4$ dann erhält man für ungerades n: $a_n = 10 + 4 = 14$
und für gerades n: $a_n = 10 - 4 = 6$. (falsch)
Das würde passen, wenn $a_1 = 14$ und dann $a_2 = 6$ wäre!

Übersicht: Gegeben ist die Folge r, s, r, s, r, s, ….durch $a_{n+1} + a_n = z$.

1. Schritt: Berechne den Mittelwert $m = \frac{1}{2} \cdot (r+s) = \frac{1}{2} \cdot z$
2. Schritt: Berechne den Abstand d der beiden Zahlen r und s von m:
   Er ist praktisch der Radius des Intervalls von r bis s:
   $d = \left|\frac{1}{2} z - r\right|$ (man braucht den Betrag, wenn r > s ist).
3. Schritt: Die explizite Formel heißt dann:
   entweder $\boxed{a_n = m + (-1)^n \cdot d}$ oder $\boxed{a_n = m + (-1)^{n+1} \cdot d}$.
   Je nachdem, ob die kleinere der beiden Zahlen r und s als a_1 auftritt oder als a_2.

(14) Stelle eine rekursive und eine explizite Formel für die Folge $-3, \; 7, \; -3, \; 7, \; ....$ auf.

a) Zuerst sollte man festhalten, dass die Summe aufeinander folgender Zahlen immer 4 ist:

$\boxed{a_{n+1} + a_n = 4}$ mit $a_1 = -3$ ist somit die rekursive Definition.

b) Eine explizite Darstellung sieht so aus: $a_n = \begin{cases} -3 & \text{für } n \text{ ungerade} \\ 7 & \text{für } n \text{ gerade} \end{cases}$.

c) Mit einem einzigen Term:

Mittelwert: $m = \frac{-3+7}{2} = \frac{4}{2} = 2$, „Radius“: $d = |2-7| = 5$ oder $d = |2-(-3)| = 5$

Formel: $a_n = m + (-1)^n \cdot d = 2 + (-1)^n \cdot 5$ oder $a_n = m + (-1)^{n+1} \cdot d = 2 + (-1)^{n+1} \cdot 5$

Probe: $a_1 = 2 - 5 = -3$ stimmt! $a_1 = 2 + 5 = 7$ falsch.

Die erste Formel wird richtig, weil bei ungeraden n $(-1)^n$ zu -1 wird und somit die kleinere Zahl entsteht, die auch die Folge anführt.

Ergebnis: $\boxed{a_n = 2 + (-1)^n \cdot 5}$

Hätten wir diese Folge $7, \; -3, \; 7, \; -3, \; 7, \; ....$, dann müssten wir den zweiten Term nehmen, weil dann $(-1)^{n+1}$ ein Pluszeichen erzeugt und wir so zur größeren der beiden Zahlen kommen!

4.3 Rekursiv definierte Folgen mit konstantem Produkt

(15) Gegeben: $\boxed{a_{n+1} = \frac{2}{a_n}}$ mit $a_1 = 16$. also $\boxed{a_{n+1} \cdot a_n = 2}$

Dann folgt:

$$a_2 = \frac{2}{a_1} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8},$$

$$a_3 = \frac{2}{a_2} = \frac{2}{\frac{1}{8}} = 2 \cdot 8 = 16 \quad (= a_1)$$

$$a_4 = \frac{2}{a_3} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8} \quad (= a_2)$$

Ist der eine Faktor (also a_1) die Zahl 16, muss der andere $\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$ sein.

Und dessen Nachfolger muss wieder 16 sein, denn das Produkt beider Faktoren muss immer 2 sein.

Beginnt man mit einem <u>anderen Anfangsglied</u>, ändert sich die Folge.

Beispiel: $\boxed{a_{n+1} = \frac{2}{a_n}}$ mit $a_1 = 4$,

dann ist $a_2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Nach $\frac{1}{2}$ folgt wieder 4 usw., denn das Produkt ist stets 2.

Allgemein:

Lautet die rekursive Formel $\boxed{a_{n+1} = \frac{z}{a_n}}$ bzw. $\boxed{a_{n+1} \cdot a_n = z}$, dann folgt auf a_1 die Zahl $a_2 = \frac{z}{a_1}$

und darauf wieder $a_3 = \frac{z}{\frac{z}{a_2}} = z \cdot \frac{a_2}{z} = a_2$ usw.

Es wechseln sich also immer die beiden Zahlen a_1 und $\frac{z}{a_1}$ ab !

Aufstellung einer expliziten Formel dazu

<u>**1. Möglichkeit: additive Methode wie in 4.2 beschrieben**</u>

Der Mittelwert der Zahlen 16 und $\frac{1}{8}$ ist $m = \frac{1}{2} \cdot \left(16 + \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{129}{8} = \frac{129}{16}$.
Die Differenz von m zu a_1 ist $d = \left|\frac{129}{16} - 16\right| = \frac{127}{16}$ (Radius des Intervalls von $\frac{1}{8}$ bis 16 .

Die explizite Formel lautet dann: $\boxed{a_n = \frac{129}{16} + (-1)^n \cdot \frac{127}{16}}$ oder $\boxed{a_n = \frac{129}{16} + (-1)^{n+1} \cdot \frac{127}{16}}$

Weil a_1 die größere der beiden Zahlen ist, benötigt man hier die zweite Formel:

Probe: $a_1 = \frac{129}{16} + \frac{127}{16} = \frac{2}{16} = \frac{256}{16} = 16$, was stimmt.

Mit der 1. Formel würde man erhalten:

$a_1 = \frac{129}{16} - \frac{127}{16} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$, was falsch ist.

Dann hätte die Folge mit $\frac{1}{8}$ beginnen müssen!

2. Möglichkeit: multiplikative Methode

Wie man der Formel ansieht, treten hier hässliche Brüche auf. Diese entstehen dadurch, dass es sich hier um konstante Produkte handelt.

Man kann diese Methode auf eine multiplikative Methode übertragen.

Dann ersetzen wir

das arithmetische Mittel	durch das geometrische Mittel
den Radius	durch einen Quotienten
und die Summenformel	durch eine Produktformel.

Ausführlich: Die Folge heißt $\frac{1}{8}$, 16, $\frac{1}{8}$, 16, $\frac{1}{8}$, 16, ...

1. Schritt: Berechne das geometrische Mittel $m = \sqrt{a_1 \cdot a_2} = \sqrt{\frac{1}{8} \cdot 16} = \sqrt{2}$

2. Schritt: Berechne den Quotienten q von 16 und m:

$$q = \frac{16}{\sqrt{2}} = \frac{16 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{16 \cdot \sqrt{2}}{2} = 8\sqrt{2}$$

3. Schritt: Die explizite Formel heißt dann:

entweder $\boxed{a_n = m \cdot q^{(-1)^n}}$ oder . $\boxed{a_n = m \cdot q^{(-1)^{n+1}}}$

Je nachdem, ob die a_1 die kleinere Zahlen ist oder nicht.

Probe mit $\boxed{a_n = \sqrt{2} \cdot \left(8\sqrt{2}\right)^{(-1)^n}}$: $a_1 = \sqrt{2} \cdot \left(8\sqrt{2}\right)^{-1} = \frac{\sqrt{2}}{8\sqrt{2}} = \frac{1}{8}$ Richtig!

$$a_2 = \sqrt{2} \cdot \left(8\sqrt{2}\right)^1 = \sqrt{2} \cdot 8 \cdot \sqrt{2} = 8 \cdot 2 = 16$$

Probe mit $\boxed{a_n = \sqrt{2} \cdot \left(8\sqrt{2}\right)^{(-1)^{n+1}}}$: $a_1 = \sqrt{2} \cdot \left(8\sqrt{2}\right)^1 = \sqrt{2} \cdot 8 \cdot \sqrt{2} = 16$ Falsch!

Trainingsaufgabe 2

Die Lösungen enthalten außer den geforderten 5 Werten viele Zusätze für fortgeschrittene Leser, etwa auch wie man explizite Formeln erstellt u. v. a.

a)	$a_n = \frac{1}{a_{n-1}}$	mit $a_1 = 12$	b)	$a_{n+1} = \frac{3}{2} a_n$	mit $a_1 = 4$
c)	$a_{n+1} = 4 - a_n$	mit $a_1 = -1$	d)	$a_{n+1} = a_n - 15$	mit $a_4 = 55$
e)	$a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n - 1$	mit $a_6 = \frac{1}{4}$	f)	$a_n = a_{n-1}^{\ 2}$	mit $a_1 = 1$ (bzw. 2)
g)	$a_n = (-1)^n \cdot a_{n-1}^{\ 2}$	mit $a_1=2$	h)	$a_n = a_{n-1} + \frac{n-1}{n}$	mit $a_1 = 4$
i)	$a_{n+1} = 2^{a_n}$	mit $a_1 = 0$.	j)	$a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$	mit $a_1 = 1$, $a_2 = 2$

Usw.